La méthode du gradient proximé*

Patrick L. Combettes[1]

[1]North Carolina State University
Department of Mathematics
Raleigh, NC 27695, USA
plc@math.ncsu.edu

Résumé. La méthode du gradient proximé est un algorithme d'éclatement pour la minimisation de la somme de deux fonctions convexes, dont l'une est lisse. Elle trouve des applications dans des domaines tels que la mécanique, le traitement du signal, les problèmes inverses, l'apprentissage automatique, la reconstruction d'images, les inéquations variationnelles, les statistiques, la recherche opérationnelle et le transport optimal. Son formalisme englobe une grande variété de méthodes numériques en optimisation, telles que la descente de gradient, le gradient projeté, la méthode de seuillage itératif, la méthode des projections alternées, la méthode de Landweber contrainte, ainsi que divers algorithmes en statistique et en analyse parcimonieuse de données. Cette synthèse vise à donner un aperçu des principales propriétés de la méthode du gradient proximé et d'aborder certaines de ses applications.

Abstract. The proximal gradient method is a splitting algorithm for the minimization of the sum of two convex functions, one of which is smooth. It has applications in areas such as mechanics, inverse problems, machine learning, image reconstruction, variational inequalities, statistics, operations research, and optimal transportation. Its formalism encompasses a wide variety of numerical methods in optimization such as gradient descent, projected gradient, iterative thresholding, alternating projections, the constrained Landweber method, as well as various algorithms in statistics and sparse data analysis. This paper aims at providing an account of the main properties of the proximal gradient method and to discuss some of its applications.

*P. L. Combettes. Courriel : plc@math.ncsu.edu. Téléphone : +1 919 515 2671. Ce travail a été subventionné par le contrat CCF-2211123 de la National Science Foundation.

§1. Introduction

Notations. $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_k$ désignent des espaces euclidiens, à savoir des espaces hilbertiens réels de dimension finie. On note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ leur produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Une fonction $f\colon \mathcal{H} \to]-\infty,+\infty]$ est *propre* si $\operatorname{dom} f = \big\{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < +\infty\big\} \neq \varnothing$. La classe des fonctions semi-continues inférieurement, convexes et propres de $\mathcal{H}$ dans $]-\infty,+\infty]$ se note $\Gamma_0(\mathcal{H})$. Enfin, ir C désigne l'intérieur relatif d'une partie convexe $C \subset \mathcal{H}$, *i.e.*, l'intérieur de C en tant que sous-ensemble du plus petit espace affine qui contient C.

Le thème central de cet article est le problème de minimisation convexe suivant, qui sous-tend une multitude de formulations variationnelles en mathématiques appliquées et dans les sciences de l'ingénieur.

Problème 1. Soient $\beta \in]0,+\infty[$, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable dont le gradient ∇g est β-lipschitzien. L'objectif est de

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + g(x) \tag{1}$$

sous l'hypothèse que l'ensemble des solutions $\operatorname{Argmin}(f+g)$ est non vide.

La méthode du gradient proximé s'inscrit dans la classe des méthodes d'éclatement, qui visent à décomposer un problème en composantes élémentaires faciles à activer individuellement dans un algorithme [16, 26]. Dans le cas du Problème 1, il s'agit d'activer la fonction f via son opérateur de proximité et la fonction g, qui est lisse, via son gradient. Ainsi, la méthode du *gradient proximé* alterne un pas de gradient sur g et un pas proximal sur f.

On fournit dans la Section 2 quelques résultats essentiels sur les fonctions convexes. La méthode du gradient proximé est décrite dans la Section 3, qui couvre également ses principales propriétés asymptotiques. Diverses applications de la méthode sont décrites dans la Section 4. La Section 5 sur la version duale de la méthode du gradient proximé et la Section 6 sur sa version multivariée, ouvrent de nouveaux champs d'application. On récapitule dans la Section 7 les points principaux de cette synthèse.

§2. Cadre mathématique

Les résultats suivants concernent l'opérateur de proximité de Moreau [30, 32], un outil indispensable en analyse convexe non lisse.

Lemme 1. *Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $x \in \mathcal{H}$. Posons*

$$\psi\colon \mathcal{H} \to]-\infty,+\infty]\colon y \mapsto f(y) + \frac{1}{2}\|x-y\|^2. \tag{2}$$

Alors ψ admet un minimiseur unique noté $\operatorname{prox}_f x$ *et appelé le* point proximal *de x relativement à f. Il est caractérisé comme suit :*

$$(\forall p \in \mathcal{H}) \quad \big[\; p = \operatorname{prox}_f x \quad\Leftrightarrow\quad (\forall y \in \mathcal{H}) \quad \langle y-p \,|\, x-p\rangle + f(p) \leqslant f(y) \;\big]. \tag{3}$$

On appelle prox_f *l'*opérateur de proximité *de f.*

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\operatorname{prox}_f x$ est établie dans [32, Proposition 3.a] et la caractérisation dans [9, Proposition 12.26]. □

Exemple 1 (projection sur un convexe). Soient C une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{H}$, ι_C la *fonction indicatrice* de C, *i.e.*,

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \quad \iota_C(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ y \in C; \\ +\infty, & \text{si } \ y \notin C, \end{cases} \tag{4}$$

et $x \in \mathcal{H}$. Alors $\iota_C \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et nous déduisons du Lemme 1 qu'il existe un unique point dans C, noté $\operatorname{proj}_C x$ et appelé la *projection* de x sur C, qui minimise la fonction $\delta\colon y \mapsto \|x - y\|$ sur C. Ce point est caractérisé comme suit :

$$(\forall p \in \mathcal{H}) \quad \left[\ p = \operatorname{proj}_C x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p \in C \\ (\forall y \in C) \quad \langle y - p \,|\, x - p \rangle \leqslant 0. \end{cases} \ \right] \tag{5}$$

On appelle $\operatorname{prox}_{\iota_C} = \operatorname{proj}_C$ l'*opérateur de projection* sur C.

Lemme 2 ([9, Proposition 12.28]). *Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Alors prox_f est une contraction ferme,* i.e.,

$$(\forall x \in \mathcal{H})(\forall y \in \mathcal{H}) \quad \|\operatorname{prox}_f x - \operatorname{prox}_f y\|^2 + \|(x - \operatorname{prox}_f x) - (y - \operatorname{prox}_f y)\|^2 \leqslant \|x - y\|^2, \tag{6}$$

et donc un opérateur 1*-lipschitzien.*

Rappelons enfin quelques propriétés des fonctions convexes différentiables. Tout d'abord, on dit qu'une fonction convexe $g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ est *différentiable* en $x \in \mathcal{H}$ s'il existe un vecteur $\nabla g(x) \in \mathcal{H}$, appelé le *gradient* de g en x, tel que

$$(\forall y \in \mathcal{H}) \quad \lim_{0<\alpha\downarrow 0} \frac{g(x + \alpha y) - g(x)}{\alpha} = \langle y \,|\, \nabla g(x) \rangle. \tag{7}$$

Lemme 3. *Soient $\beta \in \left]0, +\infty\right[$, $g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable, $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$ et $z \in \mathcal{H}$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $g(x) \leqslant g(y) - \langle y - x \,|\, \nabla g(x) \rangle$.

(ii) *Supposons que ∇g soit β-lipschitzien. Alors les inégalités suivantes ont lieu :*

  (a) $g(z) - \langle z - x \,|\, \nabla g(x) \rangle - (\beta/2)\|z - x\|^2 \leqslant g(x)$.

  (b) $\langle x - y \,|\, \nabla g(x) - \nabla g(y) \rangle \geqslant \|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2/\beta$.

  (c) $g(z) \leqslant g(y) + \langle z - y \,|\, \nabla g(x) \rangle + (\beta/2)\|x - z\|^2$.

Démonstration. (i): [9, Proposition 17.7(ii)].

(ii)(a): Ce résultat classique est connu sous le nom de « lemme de descente » [9, Lemma 2.64(i)].

(ii)(b): Il s'agit du « lemme de Baillon–Haddad » [8]; *cf.* [9, Corollary 18.17].

(ii)(c): Combiner (i) et (ii)(a). □

§3. La méthode

La méthode du gradient proximé est suggérée par la propriété de point fixe suivante qui caractérise les solutions du Problème 1.

Proposition 1 ([20, Proposition 3.1(iii)]). *Dans le contexte du Problème 1, soit $\gamma \in \left]0, +\infty\right[$ et posons $T = \operatorname{prox}_{\gamma f} \circ (\operatorname{Id} - \gamma \nabla g)$. Alors*

$$\operatorname{Argmin}(f + g) = \big\{ x \in \mathcal{H} \mid Tx = x \big\}. \tag{8}$$

Remarque 1. On suppose dans le Problème 1 l'existence de solutions. Une condition suffisante pour que $\operatorname{Argmin}(f+g) \neq \varnothing$ est que $f(x)+g(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$ [9, Proposition 11.15(i)].

Sur la base de la Proposition 1, le principe de l'algorithme est de chercher un point fixe par itérations successives en alternant un pas de gradient et un pas proximal. Les propriétés asymptotiques de ce schéma ont été établies sous diverses hypothèses dans [19, 20, 29, 36]. Le théorème suivant regroupe les résultats principaux, dont nous donnons une démonstration élémentaire.

Théorème 1. *Dans le contexte du Problème 1, fixons $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $\varepsilon \in \left]0, \beta^{-1}\right[$ et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left[\varepsilon, 2\beta^{-1}-\varepsilon\right]$. On itère*

$$\left|\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \ldots \\ \quad y_n = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n) \quad \text{(un pas de gradient)} \\ \quad x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f}\, y_n \quad \text{(un pas proximal).} \end{array}\right. \tag{9}$$

Alors les propriétés suivantes sont satisfaites, où $\mu = \min_{x\in\mathcal{H}}(f(x)+g(x))$ désigne la valeur optimale :

(i) *Convergence du gradient : Soit x une solution du Problème 1. Alors $\nabla g(x_n) \longrightarrow \nabla g(x)$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 < +\infty$.*

(ii) *Convergence monotone en valeur : $f(x_n)+g(x_n) \downarrow \mu$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} (f(x_n)+g(x_n)-\mu) < +\infty$.*

(iii) *Convergence des itérées : La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution du Problème 1.*

Démonstration. Posons $\varphi = f+g$ et prenons $y \in \mathcal{H}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f}\, y_n$, le Lemme 1 donne $\gamma_n^{-1}\langle y - x_{n+1} \mid y_n - x_{n+1}\rangle + f(x_{n+1}) \leqslant f(y)$, d'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(x_{n+1}) \leqslant f(y) + \langle x_{n+1} - y \mid \gamma_n^{-1}(x_n - x_{n+1}) - \nabla g(x_n)\rangle. \tag{10}$$

En outre, en vertu du Lemme 3(ii)(c),

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad g(x_{n+1}) \leqslant g(y) + \langle x_{n+1} - y \mid \nabla g(x_n)\rangle + \frac{\beta}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2. \tag{11}$$

En additionnant (10) et (11) terme à terme, on obtient

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varphi(x_{n+1}) \leqslant \varphi(y) + \frac{1}{\gamma_n}\langle x_{n+1} - y \mid x_n - x_{n+1}\rangle + \frac{\beta}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \tag{12}$$

$$= \varphi(y) + \frac{1}{2\gamma_n}\left(\|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_n} - \beta\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2. \tag{13}$$

Par ailleurs, en invoquant la Proposition 1 et les Lemmes 2 et 3(ii)(b), on voit que, pour tout $x \in \operatorname{Argmin}\varphi$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x\|^2 &= \left\|\operatorname{prox}_{\gamma_n f}\left(x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)\right) - \operatorname{prox}_{\gamma_n f}\left(x - \gamma_n \nabla g(x)\right)\right\|^2 \\ &\leqslant \left\|(x_n - x) - \gamma_n\left(\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\right)\right\|^2 \\ &= \|x_n - x\|^2 - 2\gamma_n\langle x_n - x \mid \nabla g(x_n) - \nabla g(x)\rangle + \gamma_n^2\|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 \\ &\leqslant \|x_n - x\|^2 - 2\beta^{-1}\gamma_n\|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 + \gamma_n^2\|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 \\ &= \|x_n - x\|^2 - \gamma_n(2\beta^{-1} - \gamma_n)\|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 \\ &\leqslant \|x_n - x\|^2 - \varepsilon^2\|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

(i): On déduit de (14) que

$$(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{N} \|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 \leqslant \|x_0 - x\|^2 - \|x_{N+1} - x\|^2 \leqslant \|x_0 - x\|^2. \tag{15}$$

On fait alors tendre N vers $+\infty$ pour obtenir l'assertion.

(ii): En prenant $y = x_n$ dans (12), on constate que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \varphi(x_{n+1}) \leqslant \varphi(x_n) - \left(\frac{1}{\gamma_n} - \frac{\beta}{2}\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leqslant \varphi(x_n) - \frac{\varepsilon\beta^2}{4}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \tag{16}$$

et donc que

$$(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \frac{\varepsilon\beta^2}{4} \sum_{n=0}^{N} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leqslant \varphi(x_0) - \varphi(x_{N+1}) \leqslant \varphi(x_0) - \mu. \tag{17}$$

Il s'ensuit en faisant tendre N vers $+\infty$ que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leqslant \frac{4\big(\varphi(x_0) - \mu\big)}{\varepsilon\beta^2} < +\infty. \tag{18}$$

Par ailleurs, en prenant $y \in \operatorname{Argmin}\varphi$ dans (13), on déduit de (14) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \varphi(x_{n+1}) - \mu \\ &\leqslant \frac{1}{2\gamma_n}\big(\|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2\big) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_n} - \beta\right)\|x_{n+1} - x_n\|^2 \\ &\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}\big(\|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2\big), & \text{si } \gamma_n \leqslant \dfrac{1}{\beta}; \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\big(\|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2\big) + \dfrac{\beta}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2, & \text{si } \gamma_n > \dfrac{1}{\beta}. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

En observant que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2) \leqslant \|x_0 - y\|^2 < +\infty$ et en faisant appel à (18), on obtient $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\varphi(x_n) - \mu) < +\infty$. Par suite, (16) garantit que $\varphi(x_n) \downarrow \mu$.

(iii): D'après (14), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite convergente, disons $x_{k_n} \to \overline{x}$. Notons que la semi-continuité inférieure de f et la continuité de g entraînent la semi-continuité inférieure de φ. On tire ainsi de (ii) que $\mu \leqslant \varphi(\overline{x}) \leqslant \varliminf \varphi(x_{k_n}) = \mu$, d'où $\overline{x} \in \operatorname{Argmin}\varphi$. Puisque, d'après (14), $(\|x_n - \overline{x}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, on conclut que $x_n \to \overline{x}$. □

Remarque 2.

(i) Si $f = 0$, alors (9) se réduit à l'algorithme de descente de gradient $x_{n+1} = x_n - \gamma_n \nabla g(x_n)$.

(ii) Si $g = 0$, alors (9) se réduit à l'algorithme du point proximal $x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f} x_n$.

(iii) Les conclusions du Théorème 1 demeurent valides en présence de perturbations affectant les opérateurs $\operatorname{prox}_{\gamma_n f}$ et ∇g dans (9) et dans des espaces de Hilbert généraux, la convergence dans (iii) étant alors comprise au sens de la topologie faible [19].

(iv) Le Théorème 1 fournit à la fois un taux de convergence sur les valeurs dans (ii), puisqu'on en déduit aisément que $f(x_n) + g(x_n) - \mu = o(1/n)$ [19], et la convergence des itérées dans (iii).

(v) Une version inertielle de la méthode du gradient proximé a été proposée dans [10] sous la forme

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \quad \left| \begin{array}{l} y_n = z_n - \beta^{-1}\nabla g(z_n) \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\beta^{-1}f} y_n \\ t_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{4t_n^2+1}}{2} \\ \lambda_n = 1 + \dfrac{t_n - 1}{t_{n+1}} \\ z_{n+1} = x_n + \lambda_n(x_{n+1} - x_n). \end{array} \right.\end{array} \tag{20}$$

Cet algorithme atteint un taux $f(x_n) + g(x_n) - \mu = O(1/n^2)$ sur les valeurs, mais sans garantie de convergence des itérées $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il nécessite en outre le stockage d'une variable supplémentaire. Une variante qui garantit la convergence des itérées avec un taux similaire sur les valeurs est analysée dans [12]. On pourra également consulter [4, 18] sur ce sujet.

Un cas particulier du Problème 1 est celui de la minimisation d'une fonction lisse sous contrainte. Cela revient à choisir comme fonction f l'indicatrice de l'ensemble des contraintes.

Problème 2. Soient $\beta \in \left]0, +\infty\right[$, C une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{H}$ et $g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable de gradient β-lipschitzien. L'objectif est de

$$\operatorname*{minimiser}_{x\in C} \; g(x) \tag{21}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe.

Au vu de l'Exemple 1, on obtient alors la méthode du gradient projeté.

Corollaire 1. *Dans le contexte du Problème 2, fixons $x_0 \in C$, $\varepsilon \in \left]0, \beta^{-1}\right[$ et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left[\varepsilon, 2\beta^{-1} - \varepsilon\right]$. Itérons*

$$\begin{array}{l}\textit{pour } n = 0, 1, \dots \\ \quad \left| \begin{array}{ll} y_n = x_n - \gamma_n\nabla g(x_n) & \text{(un pas de gradient)} \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_C y_n & \text{(un pas de projection).} \end{array} \right.\end{array} \tag{22}$$

Alors les propriétés suivantes sont satisfaites, où $\mu = \min_{x\in C} g(x)$ désigne la valeur optimale :

(i) *Soit x une solution du Problème 2. Alors $\nabla g(x_n) \to \nabla g(x)$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\nabla g(x_n) - \nabla g(x)\|^2 < +\infty$.*
(ii) *$g(x_n) \downarrow \mu$ avec $\sum_{n\in\mathbb{N}} (g(x_n) - \mu) < +\infty$.*
(iii) *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution du Problème 2.*

§4. Applications

4.1. Modèle général avec enveloppes de Moreau

Cette section s'articule autour de la notion suivante due à Moreau [31].

Définition 1. Soient $h \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\rho \in \left]0, +\infty\right[$. Alors

$$^{\rho}h\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \inf_{y\in\mathcal{H}} \left(h(y) + \frac{1}{2\rho}\|x - y\|^2 \right) \tag{23}$$

est l'*enveloppe de Moreau* de h de paramètre ρ.

Lemme 4. *Soient $h \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\rho \in]0,+\infty[$. Posons $g = {}^{\rho}h$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites:*

(i) *$g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable, avec $\nabla g = (\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_{\rho h})/\rho$.*
(ii) $\mathrm{Argmin}\, {}^{\rho}h = \mathrm{Argmin}\, h$.

Démonstration. (i): [9, Proposition 12.30] ou [31].
(ii): Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors, d'après (i) et la Proposition 1 (appliquée avec $g = 0$), $x \in \mathrm{Argmin}\, {}^{\rho}h \Leftrightarrow \nabla\, {}^{\rho}h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{prox}_{\rho h}\, x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Argmin}\, h$. □

Exemple 2 (distance à un convexe). Soient C une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{H}$ et $d_C\colon x \mapsto \inf_{y\in C} \|x-y\|$ sa fonction distance. Alors on déduit de (23) que ${}^{1}\iota_C\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \inf_{y\in C} \|x-y\|^2/2 = d_C^2(x)/2$ et du Lemme 4(i) que $\nabla d_C^2/2 = \mathrm{Id} - \mathrm{proj}_C$.

Nous présentons à présent notre corollaire principal du Théorème 1(iii). Ce type de formulation a été proposé en théorie du signal [20].

Corollaire 2. *Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, soient $h_k \in \Gamma_0(\mathcal{G}_k)$, $L_k\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}_k$ un opérateur linéaire non nul, $\omega_k \in]0,+\infty[$ et $\rho_k \in]0,+\infty[$. L'objectif est de*

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \sum_{k=1}^{p} \omega_k \big({}^{\rho_k}h_k\big)(L_k x), \tag{24}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe. Fixons

$$x_0 \in \mathcal{H},\ \varepsilon \in \left]0, \beta^{-1}\right[\text{ et une suite } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dans } \left[\varepsilon, 2\beta^{-1}-\varepsilon\right],\ \text{où } \beta = \sum_{k=1}^{p} \frac{\omega_k \|L_k\|^2}{\rho_k}, \tag{25}$$

et itérons

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \quad \text{pour } k = 1, \dots, p \\ \quad\quad \left\lfloor z_{n,k} = \dfrac{\omega_k}{\rho_k} L_k^*\big(L_k x_n - \mathrm{prox}_{\rho_k h_k}(L_k x_n)\big) \right. \\ \quad y_n = x_n - \gamma_n \displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_{n,k} \\ \quad x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\gamma_n f}\, y_n. \end{array} \tag{26}$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de (24).

Démonstration. Posons $g = \sum_{k=1}^{p} \omega_k \big({}^{\rho_k}h_k\big) \circ L_k$. Alors on déduit du Lemme 4(i) que g est convexe et différentiable avec

$$\nabla g\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{p} \omega_k L_k^* \circ \nabla\big({}^{\rho_k}h_k\big) \circ L_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{\omega_k}{\rho_k} L_k^* \circ (\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_{\rho_k h_k}) \circ L_k. \tag{27}$$

Puisque le Lemme 2 garantit que les opérateurs $(\mathrm{Id} - \mathrm{prox}_{\rho_k h_k})_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont 1-lipschitziens, ∇g est β-lipschitzien. Nous constatons ainsi que (24) est un cas particulier de (1) et que (26) est un cas particulier de (9). La conclusion découle donc du Théorème 1(iii). □

4.2. Cas particuliers

Nous décrivons plusieurs applications du Corollaire 2, dont nous adoptons les notations et les hypothèses.

Exemple 3. On considère le problème de minimisation conjoint

$$\text{trouver } x \in \operatorname{Argmin} f \text{ tel que } (\forall k \in \{1,\dots,p\}) \ L_k x \in \operatorname{Argmin} h_k. \tag{28}$$

On peut interpréter (24) comme une relaxation de ce problème au sens où, si (24) admet des solutions, alors elles coïncident avec celles de (28) (*cf.* Lemme 4(ii)) tandis que, si (24) n'admet pas de solution, alors (28) fournit des solutions généralisées [16, Section 8.4.2]. En particulier, l'algorithme (26) résout (28) si ce dernier admet une solution.

Exemple 4. Dans l'Exemple 3, supposons que

$$f = \iota_C \quad \text{et} \quad (\forall k \in \{1,\dots,p\}) \quad h_k = \iota_{D_k} \quad \text{et} \quad \rho_k = 1, \tag{29}$$

où $C \subset \mathcal{H}$ et, pour chaque $k \in \{1\dots,p\}$, $D_k \subset \mathcal{G}_k$ sont des ensembles convexes fermés et non vides. Alors (28) se réduit au problème d'admissibilité convexe

$$\text{trouver } x \in C \text{ tel que } (\forall k \in \{1,\dots,p\}) \ L_k x \in D_k, \tag{30}$$

tandis que, compte tenu de l'Exemple 2, (24) prend la forme du problème aux moindres carrés contraints

$$\underset{x\in C}{\text{minimiser}} \ \sum_{k=1}^{p} \omega_k d^2_{D_k}(L_k x). \tag{31}$$

Dans ce scénario, en invoquant l'Exemple 1, on voit que (26) se réécrit sous la forme

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} \text{pour } k = 1, \dots, p \\ \quad \left\lfloor z_{n,k} = \omega_k L_k^*\big(L_k x_n - \operatorname{proj}_{D_k}(L_k x_n)\big) \right. \\ y_n = x_n - \gamma_n \displaystyle\sum_{k=1}^{p} z_{n,k} \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_C y_n, \end{array} \right. \end{array} \tag{32}$$

où

$$x_0 \in \mathcal{H}, \ \varepsilon \in \left]0, \beta^{-1}\right[\text{ et } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite dans } \left[\varepsilon, 2\beta^{-1} - \varepsilon\right], \text{ avec } \beta = \sum_{k=1}^{p} \omega_k \|L_k\|^2. \tag{33}$$

Exemple 5 ([25]). Dans l'Exemple 4, prenons $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$, $C = \mathbb{R}^N$ et, pour chaque $k \in \{1,\dots,p\}$, $\mathcal{G}_k = \mathbb{R}$, $L_k : x \mapsto a_k^\top x$, où $a_k \in \mathbb{R}^N$, $\omega_k = 1$ et $D_k = \{\eta_k\}$, où $\eta_k \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}^{p\times N}$ la matrices dont les lignes sont $a_1^\top, \dots, a_p^\top$ et posons $y = (\eta_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$. Alors (30) revient à résoudre le système linéaire $Ax = y$ et (31) à minimiser la fonction quadratique $x \mapsto \|Ax - y\|^2$. Cette relaxation aux moindres carrés d'un système linéaire remonte aux travaux de Legendre [25].

Exemple 6. Soit $\rho \in]0,+\infty[$. Dans le Corollaire 2, supposons que $f = 0$ et que $(\forall k \in \{1,\dots,p\})$ $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}$, $L_k = \mathrm{Id}$, $\rho_k = \rho$ et $\omega_k = 1$. Ce choix débouche sur le problème

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad \sum_{k=1}^{p} \big({}^{\rho}h_k\big)(x), \tag{34}$$

qui apparaît en apprentissage fédéré [33]. Dans ce cas, en prenant $\gamma_n \equiv \rho/p$ dans (26). on obtient la méthode proximale barycentrique

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \; x_{n+1} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{prox}_{\rho h_k}\, x_n. \right. \end{array} \tag{35}$$

Exemple 7. Soient $\rho \in]0,+\infty[$ et $h \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. Dans le Corollaire 2 supposons que $p = 1$, $\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}$, $L_1 = \mathrm{Id}$, $h_1 = h$, $\rho_1 = \rho$ et $\omega_1 = 1$. Alors l'objectif est de

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \big({}^{\rho}h\big)(x). \tag{36}$$

Dans ce cas, en prenant $\gamma_n \equiv \rho$ dans (26), on obtient la méthode proximale alternée

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \; x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\rho f}\big(\mathrm{prox}_{\rho h}\, x_n\big). \right. \end{array} \tag{37}$$

En particulier, supposons que $\rho = 1$, $f = \iota_C$ et $h = \iota_D$, où C et D sont des parties convexes fermées non vides de $\mathcal{H}$. Alors, en s'appuyant sur l'Exemple 2, on voit que (36) revient à minimiser sur C la distance à D. Par ailleurs, au vu de l'Exemple 1, (37) donne lieu à la méthode des projections alternées [15]

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \; x_{n+1} = \mathrm{proj}_C\big(\mathrm{proj}_D\, x_n\big). \right. \end{array} \tag{38}$$

Exemple 8. Soient $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $\ell \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $z \in \mathcal{H}$ et $\rho \in]0,+\infty[$. Nous nous intéressons au problème bivarié avec couplage quadratique

$$\underset{x\in\mathcal{H},\, w\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \ell(w) + \frac{1}{2\rho}\|x + w - z\|^2, \tag{39}$$

que l'on retrouve dans divers travaux [1, 2, 6, 20, 29]. Posons $h\colon y \mapsto \ell(z-y)$, de sorte qu'en effectuant le changement de variable $y = z - w$, (39) devient

$$\underset{x\in\mathcal{H},\, y\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + h(y) + \frac{1}{2\rho}\|x - y\|^2. \tag{40}$$

Autrement dit, nous revenons au problème (36) par rapport à la variable x. On applique l'algorithme (37) en notant que $\mathrm{prox}_{\rho h}\colon x \mapsto z - \mathrm{prox}_{\rho\ell}(z-x)$ [9, Proposition 24.8], ce qui nous donne

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \; x_{n+1} = \mathrm{prox}_{\rho f}\big(x_n - z + \mathrm{prox}_{\rho\ell}(z - x_n)\big). \right. \end{array} \tag{41}$$

On obtient alors la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un point $x \in \mathcal{H}$ tel que $(x, \mathrm{prox}_{\rho h}(z-x))$ résout (39), si ce dernier admet une solution.

4.3. Modèles avec terme quadratique

Dans cette section, y désigne un vecteur dans $\mathcal{G}$, $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ un opérateur linéaire non nul et $L^*\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ son adjoint. Le terme lisse du Problème 1 est la fonctionnelle des moindres carrés

$$g\colon x \mapsto \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2. \tag{42}$$

On rappelle que g est convexe et différentiable et que $\nabla g\colon x \mapsto L^*(Lx - y)$ est $\|L\|^2$-lipschitzien. Dans ce cadre, le Théorème 1(iii) nous donne immédiatement le résultat suivant.

Exemple 9. Soit $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$. L'objectif est de

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2 \tag{43}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe. Ce type de problème se manifeste notamment en science des données, où $y = L\overline{x}$ représente une observation linéaire (éventuellement bruitée) du vecteur $\overline{x}$ à estimer et f pénalise une propriété connue de $\overline{x}$ [20]. Soient

$$x_0 \in \mathcal{H},\ \varepsilon \in \left]0, \|L\|^{-2}\right[\text{ et } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite dans } \left[\varepsilon, 2\|L\|^{-2} - \varepsilon\right]. \tag{44}$$

Itérons

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} z_n = \gamma_n L^*(Lx_n - y) \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f}(x_n - z_n). \end{array} \right. \end{array} \tag{45}$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de (43).

Les Exemples 10 à 15 ci-dessous sont des cas particuliers de l'Exemple 9, dont nous adoptons les notations et les hypothèses.

Exemple 10. Soient $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$ et $(\phi_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ des fonctions dans $\Gamma_0(\mathbb{R})$. L'objectif est de

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad \sum_{k=1}^{N} \phi_k\big(\langle x \mid e_k\rangle\big) + \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2 \tag{46}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe. Ici, ϕ_k pénalise le k^{e} coefficient de la décomposition de $\overline{x}$ dans la base orthonormale $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ [19, 20, 21]. Sous l'hypothèse (44), itérons

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} z_n = \gamma_n L^*(Lx_n - y) \\ x_{n+1} = \sum_{k=1}^{N} \big(\operatorname{prox}_{\gamma_n \phi_k}\langle x_n - z_n \mid e_k\rangle\big) e_k. \end{array} \right. \end{array} \tag{47}$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de (46).

Démonstration. Il s'agit d'une réalisation de l'Exemple 9 pour laquelle $f\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{N} \phi_k(\langle x \mid e_k\rangle)$. En effet, $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et $\operatorname{prox}_{\gamma_n f}\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{N} (\operatorname{prox}_{\gamma_n \phi_k}\langle x \mid e_k\rangle) e_k$ [20, Example 2.19]. □

Exemple 11. Considérons le cas particulier de l'Exemple 10 où $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{G} = \mathbb{R}^M$, L est une matrice de taille $M \times N$, $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et $(\forall k \in \{1,\dots,N\})$ $\phi_k = |\cdot|$. Ce choix est destiné à promouvoir la parcimonie des solutions. Alors (46) se réduit au problème « Lasso » [14, 35]

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad \|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2 \tag{48}$$

et (47) à l'algorithme de seuillage doux itératif [20, 21]

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots\\ \left\lfloor\begin{array}{l} z_n = \gamma_n L^\top (Lx_n - y)\\ x_{n+1} = \big(\text{doux}_{\gamma_n}([x_n - z_n]_1), \dots, \text{doux}_{\gamma_n}([x_n - z_n]_N)\big),\end{array}\right.\end{array} \tag{49}$$

où $[x_n - z_n]_k$ désigne la k^{e} composante du vecteur $x_n - z_n$ et

$$\text{doux}_{\gamma_n} : \xi \mapsto \text{signe}(\xi)\max\{|\xi| - \gamma_n, 0\}. \tag{50}$$

Exemple 12. Considérons la variante dite du « filet élastique » [22] de l'Exemple 11 qui consiste à ajouter un terme quadratique, à savoir,

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad \|x\|_1 + \frac{\beta}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2. \tag{51}$$

Dans ce cas, (47) donne lieu à l'algorithme

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots\\ \left\lfloor\begin{array}{l} z_n = \gamma_n L^\top (Lx_n - y)\\ x_{n+1} = \left(\text{doux}_{\frac{\gamma_n}{1+\beta\gamma_n}}\left(\dfrac{[x_n - z_n]_1}{1+\beta\gamma_n}\right), \dots, \text{doux}_{\frac{\gamma_n}{1+\beta\gamma_n}}\left(\dfrac{[x_n - z_n]_N}{1+\beta\gamma_n}\right)\right).\end{array}\right.\end{array} \tag{52}$$

L'exemple suivant concerne la méthode de Landweber projetée [23], qui est une concrétisation de la méthode du gradient projeté du Corollaire 1.

Exemple 13. Soit C une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{H}$. L'objectif est de

$$\underset{x\in C}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}\|Lx - y\|^2 \tag{53}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe. Sous l'hypothèse (44), itérons

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots\\ \left\lfloor\begin{array}{l} z_n = \gamma_n L^* (Lx_n - y)\\ x_{n+1} = \text{proj}_C(x_n - z_n).\end{array}\right.\end{array} \tag{54}$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de (53).

Démonstration. Il s'agit de la réalisation de l'Exemple 9 pour laquelle $f = \iota_C$. On déduit (54) de (45) en faisant appel à l'Exemple 1. □

Si C est une partie convexe de $\mathcal{H}$, alors $L(C)$ est une partie convexe de $\mathcal{G}$. Le but de d'exemple suivant est de calculer la projection sur cet ensemble.

Exemple 14. Reprenons le cadre de l'Exemple 13 en ajoutant l'hypothèse que l'ensemble $L(C)$ est fermé. Sous l'hypothèse (44), itérons

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} p_n = Lx_n \\ z_n = \gamma_n L^*(p_n - y) \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_C(x_n - z_n). \end{array} \right.\end{array} \tag{55}$$

Alors $p_n \to \operatorname{proj}_{L(C)} y$.

Démonstration. On a vu dans l'Exemple 13 que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (54) converge vers une solution x de (53). Posons $p = Lx$, de sorte que $p = \operatorname{proj}_{L(C)} y$. Alors (54) s'écrit sous la forme (55) et, en invoquant la continuité de L, on conclut que $p_n = Lx_n \to Lx = \operatorname{proj}_{L(C)} y$. □

Exemple 15. Soient $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ des parties convexes fermées non vides de $\mathcal{G}$ dont la somme de Minkowski

$$S = \big\{x_1 + \cdots + x_m \mid x_1 \in C_1, \dots, x_m \in C_m\big\} \tag{56}$$

est fermée. Le problème de projeter un point $y \in \mathcal{G}$ sur S se manifeste dans de nombreuses applications [28, 37, 38]. Pour le résoudre, fixons des points $(x_{i,0})_{1\leqslant i\leqslant m}$ dans $\mathcal{G}$, $\varepsilon \in \left]0, 1/m\right[$, et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[\varepsilon, 2/m - \varepsilon]$. Itérons

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} p_n = \sum_{i=1}^m x_{i,n} \\ z_n = \gamma_n(p_n - y) \\ \text{pour } i = 1, \dots, m \\ \quad \left\lfloor \; x_{i,n+1} = \operatorname{proj}_{C_i}(x_{i,n} - z_n). \right. \end{array} \right.\end{array} \tag{57}$$

Alors $p_n \to \operatorname{proj}_S y$.

Démonstration. Notons $\mathbf{H}$ l'espace produit $\mathcal{G}^m$ muni de la structure euclidienne usuelle et par $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ un point générique dans $\mathbf{H}$. Posons $\mathbf{L}\colon \mathbf{H} \to \mathcal{G}\colon \mathbf{x} \mapsto x_1 + \cdots + x_m$ et $\mathbf{C} = C_1 \times \cdots \times C_m$. Alors $\|\mathbf{L}\|^2 = m$, $\boldsymbol{L}^*\colon \mathcal{G} \to \mathbf{H}\colon x \mapsto (x, \dots, x)$ et $\operatorname{proj}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} = (\operatorname{proj}_{C_1} x_1, \dots, \operatorname{proj}_{C_m} x_m)$ [9, Proposition 29.3]. De plus, $\mathbf{L}(\mathbf{C}) = S$. Ainsi, en appliquant (55) dans $\mathbf{H}$ à $\mathbf{L}$ et $\mathbf{C}$ avec le point initial $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{m,0})$ on obtient (57) et on déduit la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'Exemple 14. □

Remarque 3. Pour simplifier l'exposition, l'Exemple 9 ne fait intervenir qu'un seul terme quadratique. On peut aisément l'étendre, ainsi que les Exemples 10 à 15 qui en découlent, au problème

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \;\; f(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \omega_k \|L_k x - y_k\|^2, \tag{58}$$

où $y_k \in \mathcal{G}_k$, $L_k\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}_k$ est linéaire et $\omega_k \in \left]0, +\infty\right[$. On remplace alors (44) par

$$x_0 \in \mathcal{H},\;\; \varepsilon \in \left]0, \beta^{-1}\right[\;\text{ et } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite dans } \left[\varepsilon, 2\beta^{-1} - \varepsilon\right], \;\text{ où } \; \beta = \sum_{k=1}^{p} \omega_k \|L_k\|^2, \tag{59}$$

et on itère

$$\begin{array}{l}\text{pour } n = 0, 1, \dots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} z_n = \gamma_n \sum_{k=1}^p \omega_k L_k^*(L_k x_n - y_k) \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f}(x_n - z_n). \end{array} \right.\end{array} \tag{60}$$

§5. Dualité

Nous nous intéressons à un problème de minimisation composite.

Problème 3. Soient $\varphi \in \Gamma_0(\mathcal{H})$, $\psi \in \Gamma_0(\mathcal{G})$, $z \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{G}$ et $L\colon \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ un opérateur linéaire non nul tel que $r \in \operatorname{ir}\big\{Lx - y \mid x \in \operatorname{dom}\varphi,\ y \in \operatorname{dom}\psi\big\}$. L'objectif est de

$$\underset{x\in\mathcal{H}}{\text{minimiser}} \quad \varphi(x) + \psi(Lx - r) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2. \tag{61}$$

On note $\overline{x} = \operatorname{prox}_{\varphi+\psi\circ(L\cdot-r)} z$ la solution unique de ce problème.

Le Problème 3 sort *a priori* du champ du Problème 1. Nous allons cependant être en mesure de le résoudre par une approche duale proposée dans [17]. Le principe de la dualité est d'associer au Problème 3, dit « primal », un problème dit « dual » au sens de Fenchel–Rockafellar [9, Section 15.3]. Ce problème prend ici la forme [17]

$$\underset{v\in\mathcal{G}}{\text{minimiser}} \quad {}^1(\varphi^*)(z - L^*v) + \psi^*(v) + \langle v \mid r\rangle, \tag{62}$$

où

$$\varphi^*\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty, +\infty\right] \colon u \mapsto \sup_{x\in\mathcal{H}} \big(\langle x \mid u\rangle - \varphi(x)\big) \tag{63}$$

est la fonction conjuguée de φ^* et ${}^1(\varphi^*)$ son enveloppe de Moreau (Définition 1). L'idée est d'appliquer la méthode du gradient proximé au problème dual (62) pour construire la solution du Problème 3.

Proposition 2. *Dans le contexte du Problème 3, fixons $v_0 \in \operatorname{dom}\psi^*$, $\varepsilon \in \left]0, \|L\|^{-2}\right[$ et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left[\varepsilon, 2\|L\|^{-2} - \varepsilon\right]$. Itérons*

$$\begin{array}{l} \textit{pour } n = 0, 1, \dots \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_n = \operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*v_n) \\ v_{n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n\psi^*}\big(v_n + \gamma_n(Lx_n - r)\big). \end{array} \right. \end{array} \tag{64}$$

Alors les propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une solution $\overline{v}$ du problème (62) et $\overline{x} = \operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*\overline{v})$.*

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la solution $\overline{x}$ du Problème 3.*

Démonstration. Nous donnons seulement les étapes principales (*cf.* [17] pour les détails):

- On ramène (62) au Problème 1 en posant $f\colon v \mapsto \psi^*(v) + \langle v \mid r\rangle$ et $g\colon v \mapsto {}^1(\varphi^*)(z - L^*v)$.
- $f \in \Gamma_0(\mathcal{G})$ et $\operatorname{prox}_{\gamma f}\colon v \mapsto \operatorname{prox}_{\gamma\psi^*}(v - \gamma r)$.
- On tire du Lemme 4(i) que g est convexe et différentiable sur $\mathcal{G}$ et que son gradient $\nabla g\colon v \mapsto -L(\operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*v))$ est β-lipschitzien avec $\beta = \|L\|^2$.
- L'algorithme (64) est donc un cas particulier de l'algorithme (9). À ce titre le Théorème 1(iii) garantit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution $\overline{v}$ de (62).
- On montre que, si $\overline{v}$ résout (62), alors $\overline{x} = \operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*\overline{v})$.
- Par continuité de $\operatorname{prox}_{\varphi}$ (Lemme 2) et de L^*, $v_n \to \overline{v} \Rightarrow x_n = \operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*v_n) \to \operatorname{prox}_{\varphi}(z - L^*\overline{v}) = \overline{x}$.

□

Exemple 16. Dans la Proposition 2, supposons que $r = 0$, $\varphi = \iota_C$ et $\psi = \iota_D$, où $C \subset \mathcal{H}$ et $D \subset \mathcal{G}$ sont des parties convexes fermées telles que $0 \in \operatorname{ir}\{Lx - y \mid x \in C,\ y \in D\}$. Alors le Problème 3 est le problème de meilleure approximation

$$\underset{\substack{x \in C \\ Lx \in D}}{\text{minimiser}} \ \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \tag{65}$$

et son dual (62) est le problème

$$\underset{v \in \mathcal{G}}{\text{minimiser}} \ \frac{1}{2}\|z - L^*v\|^2 - \frac{1}{2}d_C^2(z - L^*v) + \sigma_D(v), \tag{66}$$

où $\sigma_D : v \mapsto \sup_{y \in D}\langle y \mid v\rangle$ est la fonction d'appui de D. De plus, (64) devient

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \ldots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} x_n = \operatorname{proj}_C(z - L^*v_n), \\ v_{n+1} = v_n + \gamma_n\big(Lx_n - \operatorname{proj}_D(\gamma_n^{-1}v_n + Lx_n)\big). \end{array} \right. \end{array} \tag{67}$$

Soit $\overline{x}$ l'unique solution de (65), *i.e.*, la projection de z sur $C \cap L^{-1}(D)$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution $\overline{v}$ de (66), $\overline{x} = \operatorname{proj}_C(z - L^*\overline{v})$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{x}$.

Exemple 17. Dans la Proposition 2, supposons que $\psi = \sigma_D$, où D est une partie convexe, compacte et non vide de $\mathcal{G}$. Alors l'objectif du Problème 3 est de

$$\underset{x \in \mathcal{H}}{\text{minimiser}} \ \varphi(x) + \sigma_D(Lx - r) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2, \tag{68}$$

celui du problème dual (62) est de

$$\underset{v \in D}{\text{minimiser}} \ {}^1(\varphi^*)(z - L^*v) + \langle v \mid r\rangle, \tag{69}$$

et l'algorithme (64) se réduit à

$$\begin{array}{l} \text{pour } \ n = 0, 1, \ldots \\ \left\lfloor \begin{array}{l} x_n = \operatorname{prox}_\varphi(z - L^*v_n) \\ v_{n+1} = \operatorname{proj}_D\big(v_n + \gamma_n(Lx_n - r)\big). \end{array} \right. \end{array} \tag{70}$$

Soit $\overline{x}$ l'unique solution de (68). Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution $\overline{v}$ de (69), $\overline{x} = \operatorname{prox}_\varphi(z - L^*\overline{v})$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{x}$. Notons que (68) englobe en particulier des problèmes en débruitage de signaux [5, 17] et en mécanique [24, 29].

§6. Une version multivariée

Certains problèmes d'optimisation font intervenir m variables $x_1 \in \mathcal{H}_1, \ldots, x_m \in \mathcal{H}_m$ interagissant entre elles. Ces formulations se retrouvent par exemple en décomposition de domaine [2, 3], en apprentissage automatique [7, 27], en traitement du signal et de l'image [11, 13], et dans les problèmes de flot [34]. Nous suivons l'approche de [3].

Problème 4. Soient $(\mathcal{H}_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ et $(\mathcal{G}_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ des espaces euclidiens. Pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, soit $f_i \in \Gamma_0(\mathcal{H}_i)$ et, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, soient $\tau_k \in \left]0,+\infty\right[$, $h_k\colon \mathcal{G}_k \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable de gradient β_k-lipschitzien, et $L_{ki}\colon \mathcal{H}_i \to \mathcal{G}_k$ un opérateur linéaire. On suppose que $\min_{1\leqslant k\leqslant p} \sum_{i=1}^m \|L_{ki}\|^2 > 0$. L'objectif est de

$$\underset{x_1\in\mathcal{H}_1,\dots,\,x_m\in\mathcal{H}_m}{\text{minimiser}} \quad \sum_{i=1}^m f_i(x_i) + \sum_{k=1}^p h_k\bigg(\sum_{i=1}^m L_{ki}x_i\bigg) \tag{71}$$

sous l'hypothèse qu'une solution existe.

Dans (71), le terme séparable $\sum_{i=1}^m f_i(x_i)$ pénalise les composantes $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ individuellement, tandis que le terme $\sum_{k=1}^p h_k(\sum_{i=1}^m L_{ki}x_i)$ pénalise p couplages entre ces variables modélisant les interactions.

La stratégie est de se ramener au Problème 1 en posant

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_m \\ f\colon \mathcal{H} \to \left]-\infty,+\infty\right]\colon (x_1,\dots,x_m) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^m f_i(x_i) \\ g\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}\colon (x_1,\dots,x_m) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^p h_k\bigg(\sum_{i=1}^m L_{ki}x_i\bigg). \end{cases} \tag{72}$$

On note en effet que :

- $f \in \Gamma_0(\mathcal{H})$ et, pour tout $\gamma \in \left]0,+\infty\right[$,

$$\operatorname{prox}_{\gamma f}\colon (x_1,\dots,x_m) \mapsto \Big(\operatorname{prox}_{\gamma f_1} x_1,\dots,\operatorname{prox}_{\gamma f_m} x_m\Big). \tag{73}$$

- g est convexe et lisse, et son gradient

$$\nabla g\colon (x_1,\dots,x_m) \mapsto \bigg(\sum_{k=1}^p L_{k1}^*\bigg(\nabla h_k\bigg(\sum_{j=1}^m L_{kj}x_j\bigg)\bigg),\dots,\sum_{k=1}^p L_{km}^*\bigg(\nabla h_k\bigg(\sum_{j=1}^m L_{kj}x_j\bigg)\bigg)\bigg) \tag{74}$$

  a pour constante de Lipschitz

$$\beta = p \max_{1\leqslant k\leqslant p} \tau_k \sum_{i=1}^m \|L_{ki}\|^2. \tag{75}$$

On déduit alors du Théorème 1(iii) le résultat suivant.

Proposition 3. *Dans le contexte du Problème 4 et de (75), fixons $x_{1,0} \in \operatorname{dom} f_1,\dots,x_{m,0} \in \operatorname{dom} f_m$, $\varepsilon \in \left]0,\beta^{-1}\right[$ et une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left[\varepsilon, 2\beta^{-1}-\varepsilon\right]$. On itère*

$$\begin{array}{l} \textit{pour } n = 0,1,\dots \\ \quad \textit{pour } i = 1,\dots,m \\ \quad\quad \left\lfloor \begin{array}{l} y_{i,n} = x_{i,n} - \gamma_n \displaystyle\sum_{k=1}^p L_{ki}^*\bigg(\nabla h_k\bigg(\sum_{j=1}^m L_{kj}x_{j,n}\bigg)\bigg) \\ x_{i,n+1} = \operatorname{prox}_{\gamma_n f_i} y_{i,n}. \end{array} \right. \end{array} \tag{76}$$

Alors, pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, la suite $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x_i \in \mathcal{H}_i$, et $(x_1,\dots,x_m)$ résout le Problème 4.

On trouvera dans [11] des applications de la Proposition 3 au traitement du signal, dont celle-ci.

Exemple 18. Considérons, dans le cadre du Problème 4, celui de reconstruire un signal multi-canaux $(x_1, \ldots, x_m)$ à partir de p observations imprécises

$$(\forall k \in \{1, \ldots, p\}) \quad y_k \approx \sum_{i=1}^{m} L_{ki} x_i \tag{77}$$

de mélanges linéaires, sous la contrainte que chaque composante x_i appartienne à un convexe fermé non vide C_i de $\mathcal{H}_i$. On modélise ce problème sous la forme

$$\underset{x_1 \in C_1, \ldots, x_m \in C_m}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \left\| y_k - \sum_{i=1}^{m} L_{ki} x_i \right\|^2, \tag{78}$$

ce qui revient à poser $f_i = \iota_{C_i}$ et $h_k \colon v_k \mapsto \|y_k - v_k\|^2/2$ dans le Problème 4. L'algorithme (76) s'écrit alors

$$\begin{array}{l} \text{pour } n = 0, 1, \ldots \\ \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ \quad\quad y_{i,n} = x_{i,n} + \gamma_n \displaystyle\sum_{k=1}^{p} L_{ki}^* \left(y_k - \sum_{j=1}^{m} L_{kj} x_{j,n} \right) \\ \quad\quad x_{i,n+1} = \operatorname{proj}_{C_i} y_{i,n} \end{array} \tag{79}$$

et sa convergence vers une solution de (78) est garantie par la Proposition 3. Notons que dans le scénario présent on peut affiner (75) en prenant $\beta = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \|L_{ki}\|^2$.

§7. Conclusion

L'objet principal de cette synthèse a été de montrer que, malgré son formalisme simple, le Problème 1 modélise une grande variété de problèmes concrets et qu'il peut être résolu par un algorithme alternant un pas de gradient sur sa fonction lisse et un pas proximal sur sa fonction non différentiable : la méthode du gradient proximé. Les propriétés asymptotiques de cet algorithme ont été étudiées et plusieurs de ses applications ont été décrites. Enfin, nous avons vu que, par le biais de reformulations duales ou dans des espaces produits, la portée de la méthode du gradient proximé peut être étendue à des problèmes d'optimisation qui se situent au delà du cadre initial du Problème 1.

Remerciements. L'auteur remercie Minh N. Bùi, Diego J. Cornejo et Julien N. Mayrand pour leurs relectures attentives.

Références bibliographiques

[1] F. Acker et M. A. Prestel, Convergence d'un schéma de minimisation alternée, *Ann. Fac. Sci. Toulouse V. Sér. Math.*, vol. 2, pp. 1–9, 1980.

[2] H. Attouch, J. Bolte, P. Redont et A. Soubeyran, Alternating proximal algorithms for weakly coupled convex minimization problems. Applications to dynamical games and PDE's, *J. Convex Anal.*, vol. 15, pp. 485–506, 2008.

[3] H. Attouch, L. M. Briceño-Arias et P. L. Combettes, A parallel splitting method for coupled monotone inclusions, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 48, pp. 3246–3270, 2010.

[4] H. Attouch et A. Cabot, Convergence rates of inertial forward-backward algorithms, *SIAM J. Optim.*, vol. 28, pp. 849–874, 2018.

[5] G. Aubert et P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing,* 2e éd. Springer, New York, 2006.

[6] J.-F. Aujol, G. Gilboa, T. Chan et S. Osher, Structure-texture image decomposition – modeling, algorithms, and parameter selection, *Int. J. Comput. Vision*, vol. 67, pp. 111–136, 2006.

[7] F. Bach, R. Jenatton, J. Mairal et G. Obozinski, Optimization with sparsity-inducing penalties, *Found. Trends Machine Learn.*, vol. 4, pp. 1–106, 2012.

[8] J.-B. Baillon et G. Haddad, Quelques propriétés des opérateurs angle-bornés et n-cycliquement monotones, *Israel J. Math.*, vol. 26, pp. 137–150, 1977.

[9] H. H. Bauschke et P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2e éd. Springer, New York, 2017.

[10] A. Beck et M. Teboulle, A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 2, pp. 183–202, 2009.

[11] L. M. Briceño–Arias et P. L. Combettes, Convex variational formulation with smooth coupling for multicomponent signal decomposition and recovery, *Numer. Math. Theory Methods Appl.*, vol. 2, pp. 485–508, 2009.

[12] A. Chambolle et C. Dossal, On the convergence of the iterates of the "fast iterative shrinkage/thresholding algorithm," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 166, pp. 968–982, 2015.

[13] C. Chaux, M. El-Gheche, J. Farah, J.-C. Pesquet et B. Pesquet-Popescu, A parallel proximal splitting method for disparity estimation from multicomponent images under illumination variation, *J. Math. Imaging Vision*, vol. 47, pp. 167–178, 2013.

[14] S. Chen, D. Donoho et M. Saunders, Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM Rev.*, vol. 43, pp. 129–159, 2001.

[15] W. Cheney et A. A. Goldstein, Proximity maps for convex sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 448–450, 1959.

[16] P. L. Combettes, The geometry of monotone operator splitting methods, *Acta Numer.*, vol. 33, pp. 487–632, 2024.

[17] P. L. Combettes, Đinh Dũng et B. C. Vũ, Dualization of signal recovery problems, *Set-Valued Var. Anal.*, vol. 18, pp. 373–404, 2010.

[18] P. L. Combettes et L. E. Glaudin, Quasinonexpansive iterations on the affine hull of orbits: From Mann's mean value algorithm to inertial methods, *SIAM J. Optim.*, vol. 27, pp. 2356–2380, 2017.

[19] P. L. Combettes, S. Salzo et S. Villa, Consistent learning by composite proximal thresholding, *Math. Program.*, vol. B167, pp. 99–127, 2018.

[20] P. L. Combettes et V. R. Wajs, Signal recovery by proximal forward-backward splitting, *Multiscale Model. Simul.*, vol. 4, pp. 1168–1200, 2005.

[21] I. Daubechies, M. Defrise et C. De Mol, An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 57, pp. 1413–1457, 2004.

[22] C. De Mol, E. De Vito et L. Rosasco, Elastic-net regularization in learning theory, *J. Complexity*, vol. 25, pp. 201–230, 2009.

[23] B. Eicke, Iteration methods for convexly constrained ill-posed problems in Hilbert space, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, vol. 13, pp. 413–429, 1992.

[24] I. Ekeland et R. Temam, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Dunod, Paris, 1974.

[25] A. M. Legendre, *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*. Firmin Didot, Paris, 1805.

[26] J.-L. Lions et R. Temam, Éclatement et décentralisation en calcul des variations, *Lecture Notes in Math.*, vol. 132, pp. 196–217, 1970.

[27] A. M. McDonald, M. Pontil et D. Stamos, New perspectives on k-support and cluster norms, *J. Machine Learn. Res.*, vol. 17, pp. 1–38, 2016.

[28] J. E. Martínez-Legaz et A. Seeger, A general cone decomposition theory based on efficiency, *Math. Program.*, vol. 65, pp. 1–20, 1994.

[29] B. Mercier, *Inéquations Variationnelles de la Mécanique* (Publications Mathématiques d'Orsay, no. 80.01). Université de Paris-XI, Orsay, France, 1980.

[30] J. J. Moreau, Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.*, vol. 255, pp. 2897–2899, 1962.

[31] J. J. Moreau, Propriétés des applications « prox », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. A256, pp. 1069–1071, 1963.

[32] J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 93, pp. 273–299, 1965.

[33] R. Pathak et M. J. Wainwright, FedSplit: An algorithmic framework for fast federated optimization, *Proc. Adv. Neural Inform. Process. Syst. Conf.*, vol. 33. pp. 7057–7066, 2020.

[34] R. T. Rockafellar, Monotone relations and network equilibrium, in: *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*, (F. Giannessi and A. Maugeri, eds.), pp. 271–288. Plenum Press, New York, 1995.

[35] R. Tibshirani, Regression shrinkage and selection via the lasso, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, vol. 58, pp. 267–288, 1996.

[36] P. Tseng, Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities. *SIAM J. Control Optim.*, vol. 29, pp. 119–138, 1991.

[37] X. Wang, J. Zhang et W. Zhang, The distance between convex sets with Minkowski sum structure: Application to collision detection, *Comput. Optim. Appl.*, vol. 77, pp. 465–490, 2020.

[38] J.-H. Won, J. Xu et K. Lange, Projection onto Minkowski sums with application to constrained learning, *Proc. 36th Int. Conf. Machine Learn.*, pp. 3642–3651, 2019.